Методы подобия и размерности в механике 7М05405-Механика и энергетика Лекция 1 Краткий конспект 1

**Лекция №1. Тема: Физические величины и их размерности. Формулы размерности**

При изучении механических явлений вводится ряд понятий, например, скорость, ускорение, напряжение, энергия и т.п., которые характеризуют рассматриваемое явление, и могут быть заданы и определены с помощью чисел.

Величины, численное значение которых зависит от принятых масштабов, т.е от системы единиц измерения, называются *размерными величинами*. Величины, численное значение которых не зависит от применяемой системы единиц измерения, называются *безразмерными величинами*. Длина, время, сила, энергия и т.д. могут служить примерами размерных величин. Углы, отношение двух длин, отношение энергии к моменту силы и т.п. – примеры безразмерных величин.

Размерность записывается символически в виде формулы, в которой символ единицы длины обозначается буквой L, символ единицы массы буквы – M, символ единицы времени буквой – T.

Зависимость единицы измерения производной величины от единиц измерения основных величин может быть представлена в виде формулы. Эта формула называется формулой размерности, и её можно рассматривать как сжатое определение и характеристику физической природы производной величины.

Если единица некоторой величины A имеет размерность *p, q* и *r* относительно единиц длины, массы и времени, то символически это записывают в виде

$\left[A\right]= L^{P }M^{q} T^{r}$ , (1)

где квадратные скобки, в которых поставлен символ величины A, означает, что речь идет о размерности единицы этой величины, а символы L, M и T представляют собой обобщение единиц длины, массы и времени без указания конкретного размера единицы.

Формула (1) представляет собой формулу размерности единицы данной величины, или, как часто для краткости говорят, размерность данной величины.

Пусть два тело одинаковой массы в течение некоторого времени подвержены действию разных сил. В результате тела пройдут разные пути, зависящие от действующих сил. Обозначим числовые значения сил $F\_{1 } и F\_{2 , }$пройденных путей $l\_{1 }и l\_{2}$. Существующие связи между $F\_{1 }и l\_{1 }$ и между $F\_{2 }и l\_{2 }$ запишем в общем виде:

$ F\_{1 }=f (l\_{1})$ , $F\_{2 }=f \left(l\_{2}\right).$ (2)

Из условия абсолютного значения относительных количеств вытекает, что отношение

$$\frac{F\_{1}}{F\_{2}}= \frac{f (l\_{1})}{f (l\_{2})}$$

не зависит от выбора единиц. Поэтому единицу длины можно увеличить и уменьшить в любое число раз. Уменьшим эту единицу в $x$ раз. Соответственно числа, измеряющие пути$ l\_{1 } и l\_{2}$ увеличатся в $x$ раз. Таким образом,

$\frac{ F\_{1}}{F\_{2}}= \frac{f (xl\_{1})}{f (xl\_{2})}$ =$ \frac{f (l\_{1})}{f (l\_{2})}$.

Перепишем последнее равенство в виде

$f (xl\_{1})$ = $\frac{f (l\_{1})}{f (l\_{2})}∙f (xl\_{2})$.

Продифференцируем обе части по $x$:

$l\_{1}$ = $\frac{df (xl\_{1})}{d (xl\_{1})}$ = $\frac{f (l\_{1})}{f (l\_{2})}∙ l\_{2}\frac{df (xl\_{2})}{d (xl\_{2})}$ . (3)

Так как число $x$ берется совершенно произвольно, то (3) должно быть справедливо и при $x=1$.

В этом случае (3) можно переписать в виде

$\frac{l\_{1}}{f (l\_{1})}\frac{df(l\_{1})}{dl\_{1}}=\frac{l\_{2}}{f (l\_{2})}∙ \frac{df(l\_{2})}{dl\_{2}}$.

Это равенство должно выполняться при любых L. Таким образом,

$\frac{l }{f (l)}\frac{df(l)}{dl}=a$ ,

где $a$ – некоторая постоянная величина.

Разделяя переменные и интегрируя, получим

F (l) = $k\_{1}l^{a}$.

Если изменить условие задачи и определять числовые значение двух сил, под действом которых два тела разной массы за одно и то же время пройдут одинаковые пути, то, повторяя все рассуждения, получим

F (m) = $k\_{2 }m^{b}$.

Подобным же образом для двух тел равной массы, прошедших равные пути за разные промежутки времени,

f (t) = $k\_{3}t^{c}.$

Общую зависимость можно представить в виде

 F ($l$ , m, t ) =k $l^{a}m^{b}t^{c}.$ (4)

Коэффициент $k$ представляет собой число, не зависящее от выбора единиц.

Рассмотрим какую-нибудь производную величину, например, скорость. Выбрав определенные единицы измерения, получим

$ϑ$ = $\frac{l}{t}.$

Пусть теперь единицы длины и времени изменяются таким образом, что числа, выражающие $l$ и t , увеличиваются: первое в λ раз, а второе в τ раз. Тогда в новых единицах:

,

где штрихами обозначены новые меры величин $l$, t, υ. В этом случае, если мера длины увеличивается в λ раз, а мера времени в τ раз, то мера скорости возрастает в ${λ}/{τ} $ раз. Таким образом размерность скорости определяется из формулы скорости равномерного движения в виде равенства

[υ] = $\frac{[l ]}{[t]}$= L$T^{-1}$. (5)

Размерность ускорения определяется из формулы ускорения равномерно ускоренного движения

 [$a$] = $\frac{[∆ υ ]}{[∆ t ]}$ = $\frac{[υ ]}{ [t ]}$ = $\frac{LT^{-1}}{T}$ = L $T^{-2}$ . (6)

Размерность кинетической энергии, определяемой формулой

$ W\_{k}$ = $\frac{m υ^{2}}{2}$ ,

будет равна

$ [W\_{k}]$= [1/2] $∙\left[m\right]∙ [υ]^{2}$ = $l∙$m$∙(L T^{-1})$ = $L^{2}$M$T^{-2}$ . (7)

(Коэффициент 1/2 - величина безразмерная, и поэтому [1/2] = $l$)

По формуле Ньютона (закон динамики)

F = $ma$

размерность силы равна

[F] = LM$T^{-2}.$ (8)

В дальнейшем, исследуя единицы производных величин, будем обращаться к формулам размерности физических величин